

Identificación y control de sistemas lineales con ceros con el método NHTE

E. Núñez y J. Ruiz

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Cuernavaca, Morelos, México

josera@cenidet.edu.mx

enunez@cenidet.edu.mx

Teléfono: (52)-777-3627770

Resumen—Este trabajo muestra la aplicación del método Núcleo Híbrido de Transición de Estados (NHTE) para la identificación y el control de sistemas lineales con ceros. El NHTE está fundamentado en la función de evolución de estados. Para implementar el identificador o el controlador se plantea el uso de cualquier aproximador multidimensional. En este caso se muestran resultados con redes neuronales. Además, en el caso del control se muestra un análisis de estabilidad. El método propuesto es simple y requiere poca información del sistema (orden del sistema, período de muestreo).

Palabras clave: Control de sistemas lineales, Control Inteligente.

I. INTRODUCCIÓN

En la presente propuesta se plantea un esquema de control e identificación basado en la función de evolución de estado (Willems, 1972), es decir, en el flujo o solución del conjunto de ecuaciones diferenciales para el caso de sistemas continuos o bien del conjunto de ecuaciones a diferencias para sistemas en tiempo discreto. A esta propuesta se le llama NHTE. En (Ruiz, 1999) se presenta la idea básica del NHTE y se muestra la validez del NHTE para identificación y control, implementando tanto redes neuronales y sistemas difusos, usando el controlador de planta inversa.

Entre los esquemas de identificación y control de sistemas dinámicos más afines al NHTE se encuentran los llamados de caja negra (Sjoberg, 1995) en los cuales no es necesario un modelo analítico del sistema, y se hace uso de un aproximador, que es entrenado a partir de datos experimentales. Algunos trabajos relacionados son (Narendra, 1990), (Levin, 1993) y (Levin, 1996).

En (Li, 1989) se plantea el uso de una red neuronal para aproximar el inverso de la dinámica del sistema. Esto concuerda con la propuesta del presente trabajo en el sentido que se estima la dinámica del sistema, aunque no hace referencia a la función de evolución de estado. Sin embargo, sólo menciona los aspectos teóricos de los que depende la propuesta, en este caso la controlabilidad, pero no muestra algún teorema al respecto. Al igual que el NHTE recalcan el hecho de que la red neuronal aproxima la función que representa la dinámica del sistema. Además, no muestra resultados de simulación. Por otro lado, el modelo propuesto sólo es usado para propósitos de control y no para identificación que se plantea con el NHTE.

Los sistemas con ceros presentan una dinámica que tiene

problemas para ser identificada o controlada. Esto es porque en la presencia de ceros la respuesta del sistema se hace más rápida y en el caso de ceros de fase no mínima, es decir, ceros en el semiplano derecho, la respuesta se puede ir en dirección opuesta antes de alcanzar el estado final. A este último fenómeno se le llama “undershoot” (Hoagg y Bernstein, 2007).

Por otro lado, los ceros de fase no mínima provocan inestabilidad con el control de planta inversa, ya que estos ceros se convierten en polos inestables en el controlador. Por lo tanto atacar el problema de modelado y control de sistemas con ceros es un reto para el NHTE.

En (Al-Numay, 2007) se trata el problema de modelado y control de un sistema en tiempo continuo lineal con ceros de fase no mínima. Cuatro tipos diferentes de redefinición de la salida son presentados de una forma unificada y se muestra que satisfacen diferentes formas de objetivos de control. La aproximación unificada de control de seguimiento de la salida usando redefinición de salida resulta en seguimiento de la salida aproximado, asegurando dinámica interna estable del sistema. La desventaja de este esquema es que se necesita conocimiento del modelo.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección II se muestra los fundamentos del método NHTE. En la sección III se presentan los modelos de identificación y control para sistemas con ceros, mostrando un análisis de estabilidad del esquema de control propuesto. Simulaciones, tanto de la identificación como del control, son mostradas en la sección IV. Por último en la sección V se muestran las conclusiones.

II. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO NHTE

La función de transición de estados $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, es una función que determina el estado $\mathbf{x}(t_1)$ de un sistema que suponemos determinístico y causal, en un tiempo final t_1 , a partir del estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ y de la señal de control $\mathbf{u}_{[t_0, t_1]}$ constante desde t_0 hasta t_1 .

Para realizar la estimación de la función de transición de estados $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ se toman muestras de las variables del sistema cada τ segundos. Se plantea dicha estimación en un instante de muestreo adelante $\mathbf{x}(t_0 + T) = \Phi_T(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}[t_0, t_0 + T])$, donde el control se mantiene constante entre períodos de muestreo. El hecho de que la señal de control sea constante a tramos es muy importante para el NHTE, ya que el aproximador utilizado tiene que estimar valores constantes en lugar de

funciones entre períodos de muestreo, lo cual hace tratable el problema de aproximación, es decir, que tenga solución.

Para estimar $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ se toman muestras del estado $\mathbf{x}(t)$ y del control $\mathbf{u}(t)$. Estas secuencias de muestras $\mathbf{x}[k]$, $\mathbf{u}[k]$ describen una discretización de la planta continua.

Para estimar la dinámica $\mathbf{x}(k+1) = \Phi_T(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$, se asocia para cada intervalo de muestreo el estado inicial y el control con el estado final. Este proceso se sigue con todas las muestras, tal y como se observa en la figura 1.

$x(t_0)$	$u(t_0)$	$x(t_0+T)$
$x[k]$	$u[k]$	$x[k+T]$
3,7179	2	4,2211
4,2211	2	4,6651
4,6651	2	5,057
5,057	-1	3,9927
3,9927	-1	3,0536
3,0536	-1	2,2248

Figura 1. Ordenamiento de datos para la estimación de $\Phi_T(\cdot)$.

Con base en lo anterior se plantean dos esquemas del NHTE, uno de identificación y otro de control.

El esquema de identificación se muestra en la figura 2. En este caso a través de muestreadores y retardos correspondientes se obtiene una tabla como la de la figura 1. De esta manera el NHTE se puede ver como un bloque que tiene como entradas o antecedentes al estado y la entrada en un tiempo "k" y como salida o consecuente el estado en un tiempo de muestreo adelante.

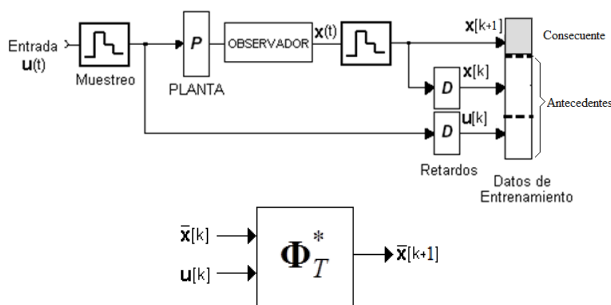


Figura 2. Esquema de identificación de Φ_T NHTE.

El esquema de control se puede observar en la figura 3. En este caso los antecedentes son el estado en un tiempo "k", así como el estado siguiente en un tiempo "k+1" y el consecuente es el control necesario para hacer dicha transición. Por la forma en que está definido este controlador es de planta inversa y además la consigna se alcanza cada período de muestreo y no es un seguimiento asintótico como en otros esquemas, es decir, es un controlador del tipo *deadbeat*. Nótese que la consigna tiene que ser un estado alcanzable desde el estado inicial y además el esfuerzo de control dependerá de las condiciones iniciales y la consigna. Por otro lado, el sistema alcanzará su consigna en un período de muestreo si la dinámica propia del sistema lo permite.

Notar que un sistema continuo quedará modelado como sistema discreto, y que las figuras 2 y 3 de ninguna manera implican un predictor, en el sentido ordinario de la palabra, sino asociar una transición a la entrada que la causa.

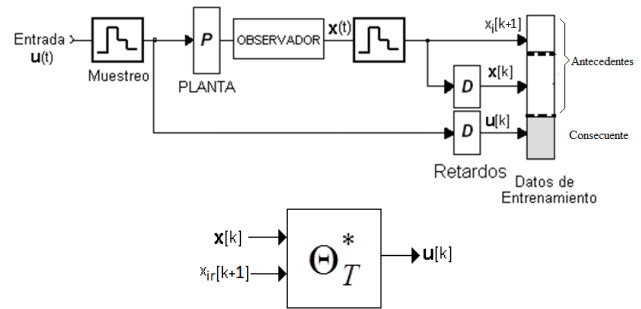


Figura 3. Esquema de control Θ_T NHTE.

Una vez obtenidos los datos a partir del sistema, el problema del NHTE se reduce a utilizar un aproximador n-dimensional que aprenda el comportamiento entrada-salida y que sea capaz de interpolar la información. En la figura 4 se observan un ejemplo de datos para identificación y control.

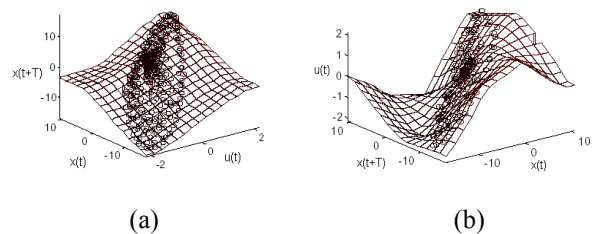


Figura 4. (a) Datos para identificación. (b) Datos para control.

Hasta el momento ya se han implementado exitosamente como aproximadores n-dimensionales las técnicas de lógica difusa, redes neuronales, ANFIS y K-vecinos en base al esquema propuesto, tanto para sistemas simulados como físicos. Por citar algunas aplicaciones en (Cholula, 2005) se implementó el NHTE con ANFIS para el control del frenado regenerativo de un motor de inducción. Por otro lado en (Figuroa, 2007) se implementó el control NHTE con un sistema difuso aplicado al control de posición de un robot PUMA de 3GDL. Es necesario recalcar que estas dos últimas aplicaciones del NHTE son para sistemas no lineales, lo cual corrobora la capacidad del NHTE para aplicarse a sistemas no lineales. Sin embargo, para sistemas con ceros el NHTE básico tiene problemas porque la dinámica estimada de los sistemas con ceros depende de señal de entrada no sólo en el instante actual.

Como se expuso arriba el NHTE es una metodología de la inteligencia computacional, ya que es un método que sólo requiere datos entrada-salida del sistema y utiliza técnicas de la inteligencia artificial para implementarlo. La única información necesaria para aplicar el NHTE es el orden del sistema y el período de muestreo, lo cual es una ventaja para el usuario ya que no requiere mayor información sobre el sistema.

La aplicación del NHTE se muestra a continuación con un sistema de primer orden dado por

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

En el caso de la identificación (figura 2) la estructura del modelo NHTE está dado por

$$\bar{y}[k+1] = \Phi_m(\bar{y}[k], u[k]) \quad (1)$$

Mientras que para propósitos de control (figura 3) la estructura del controlador NHTE es la siguiente

$$u[k] = \Phi_c(y_r[k+1], y[k]) \quad (2)$$

El controlador (2) es un esquema de planta inversa definida a partir de (1). En (2) hacemos que un valor futuro $y[k+1]$ sea la consigna, es decir, $y_r[k+1]$, a donde se quiere llegar al siguiente instante de muestreo.

A este sistema se le aplica una señal de entrada mostrada en la figura 5(a), la cual es una rampa con un ruido que se va incrementando en magnitud conforme pasa el tiempo, con el fin de excitar el sistema en una región del espacio de estado. La respuesta del sistema en lazo abierto a dicha entrada se muestra en la figura 5(b).

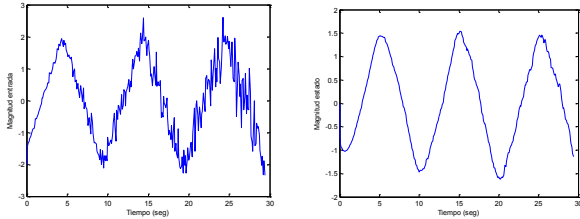


Figura 5. a) señal de entrada al sistema. b) respuesta del sistema en lazo abierto.

Las señales mostradas en la figura 5 son muestreadas con un período de muestreo adecuado, en este caso 0.1 seg. Los datos se guardan de acuerdo a lo explicado en la tabla 1 y las figuras 2 y 3. En la figura 6 se muestran los datos para identificación y control para este sistema de acuerdo a las estructuras (1) y (2). Lo que sigue es utilizar un aproximador, por ejemplo una red neuronal ó un sistema difuso, para aproximar estos datos fuera de línea. El control de sistemas con el NHTE es un método de *diseño directo*, ya que el aproximador n-dimensional directamente implementa el controlador. Además, los datos para entrenar el controlador son tomados directamente del sistema y no de un modelo. Por otro lado, la señal de referencia que debe seguir el sistema en lazo cerrado, que consiste del controlador y el sistema a controlar, puede ser una señal artificial ó bien proveniente de otro sistema (modelo de referencia).

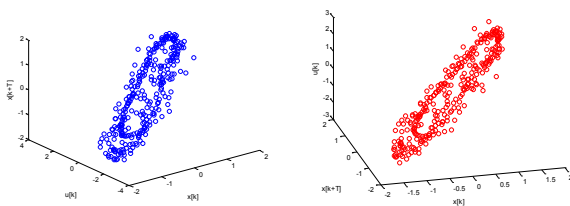


Figura 6. Datos NHTE para sistema primer orden. a) Datos para identificación, b) Datos para controlador.

I. MODELOS DE IDENTIFICACIÓN Y CONTROL PARA SISTEMAS CON CEROS

En este caso se propone utilizar como variables para el modelado y control de sistemas con ceros, aquellas variables que están involucradas en la función de transferencia del sistema en tiempo continuo con su respectiva equivalencia en tiempo discreto (ecuación a diferencias).

A continuación se muestra el procedimiento para obtener las variables involucradas en un sistema de primer orden con un cero.

Para un sistema de primer orden con un cero, las variables involucradas se obtienen de la siguiente manera
D.R. © AMCA Octubre de 2012

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{as + b}{s + c}$$

$$sY(s) + cY(s) = asU(s) + bU(s)$$

Tomando la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior

$$y'(t) + cy(t) = bu(t) + au'(t)$$

Considerando la aproximación de derivadas con diferencias finitas

$$y'(t) \cong \frac{y[k+1] - y[k]}{T}$$

Donde T es el período entre muestras, la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{y[k+1] - y[k]}{T} + cy[k] = bu[k] + a \left\{ \frac{u[k+1] - u[k]}{T} \right\}$$

Si de esta última ecuación despejamos el término $y[k+1]$ se obtiene lo siguiente

$$y[k+1] = (1 - cT)y[k] + (bT - a)u[k] + au[k+1] \quad (3)$$

Si se considera una función la ecuación anterior se puede presentar como

$$\bar{y}[k+1] = \Phi_m(\bar{y}[k], u[k], u[k+1]) \quad (4)$$

El cual es el modelo NHTE para este tipo de sistemas con ceros. Si se compara la estructura (4) con la (1) se encuentra que la información del control $u[k+1]$, como antecedente, es la que se incorpora con la nueva propuesta para lograr capturar la dinámica del sistema. En la figura 7 se muestra el esquema de este modelo

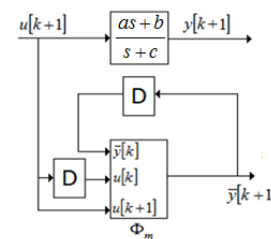


Figura 7. Esquema modelo NHTE para sistema con cero de primer orden. D representa un retardo.

Para obtener el controlador analítico se despeja del modelo del sistema (3) la señal de control $u[k+1]$

$$u[k+1] = \left(1 - \frac{bT}{a}\right)u[k] + \frac{1}{a}y_r[k+1] - \frac{(1-cT)}{a}y[k] \quad (5)$$

De la ecuación anterior se observa que este controlador es dinámico, y no estático como en el caso de sistemas sin ceros. De forma que el controlador NHTE se puede expresar

$$u[k+1] = \Phi_c(y_r[k+1], y[k], u[k]) \quad (6)$$

En esta última ecuación el término $y_r[k+1]$ es la referencia. La señal $u[k]$, que se retroalimenta al sistema, se obtiene retrasando un instante de tiempo de muestreo la salida del mismo controlador ($u[k+1]$). $y[k]$ es el estado actual del sistema. Si se compara la estructura (6) con la (2) se encuentra que la información del control $u[k]$, como antecedente, es la que se incorpora con la nueva propuesta para lograr capturar la dinámica del sistema. Por otro lado, este nuevo antecedente hace que este controlador sea dinámico a diferencia del controlador (2) que es estático. El efecto de que el controlador (6) sea dinámico en la estabilidad del sistema en lazo cerrado se tratará más adelante. El esquema de control se muestra en la siguiente figura

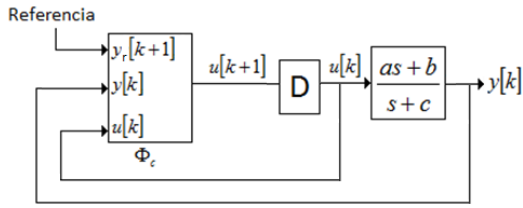


Figura 8. Esquema controlador NHTE para sistema con cero de primer orden.

En este caso, como el controlador (6) es dinámico, no es posible sustituir el control directamente en el modelo del sistema para obtener la dinámica en lazo cerrado. De forma que se procede de la siguiente manera.

Del controlador analítico (5) se hace el siguiente despeje

$$u[k+1] - \left(1 - \frac{bT}{a}\right)u[k] = \frac{1}{a}y_r[k+1] - \frac{(1-cT)}{a}y[k]$$

$$au[k+1] + (bT - a)u[k] = y_r[k+1] - (1-cT)y[k]$$

El despeje anterior se sustituye en el modelo (3) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} y[k+1] &= (1-cT)y[k] + (bT-a)u[k] + au[k+1] \\ &= (1-cT)y[k] + y_r[k+1] - (1-cT)y[k] \\ &= y_r[k+1] \end{aligned}$$

De forma que la última expresión indica que en lazo cerrado la salida del sistema $y[k+1]$ es igual a la referencia $y_r[k+1]$, siempre y cuando la dinámica interna del controlador sea estable.

Para estudiar la estabilidad de este sistema se hace uso del siguiente teorema:

Teorema 1 (Jamshidi, 1986): Dado el sistema

$$\mathbf{x}[k+1] = \Phi \mathbf{x}[k]$$

Un sistema discreto, lineal, invariante en el tiempo es asintóticamente estable si y sólo si todos los eigenvalores de Φ están dentro del círculo unitario.

De acuerdo a la dinámica del controlador (5), se pueden tener dos comportamientos en cuanto a la estabilidad, para sistemas de fase mínima y de fase no mínima, en base al teorema 1.

- Si el sistema es de fase mínima, a y b son del mismo signo, y por lo tanto el término que representa la dinámica interna del controlador

$$\left|1 - \frac{bT}{a}\right| < 1 \quad (7)$$

generará, en la mayoría de los casos, una dinámica estable en el controlador. Para valores apropiados de T la dinámica es estable, pero también nos dice cuáles son los límites para este período.

- Si el sistema es de fase no mínima, a y b son de signo contrario, y por lo tanto el término que representa la dinámica interna del controlador

$$\left|1 - \frac{bT}{a}\right| > 1 \quad (8)$$

Como el término bT/a siempre es positivo siempre se genera una dinámica inestable en el controlador.

De forma que el esquema de control es estable para sistemas de fase mínima e inestable para sistemas de fase no mínima. Desde luego hay que tomar en cuenta que el proceso de discretización puede cambiar la condición de estabilidad con respecto al sistema en continuo. Por ejemplo en (Astrom, 1980) se muestra que un sistema continuo con una inversa inestable, es decir con ceros en el semiplano derecho, puede llegar a ser un sistema en tiempo discreto con inversa estable cuando es muestreado.

En el apéndice se muestra otro camino para llegar al controlador analítico basado en la discretización para este tipo de sistemas.

II. APLICACIÓN IDENTIFICACIÓN Y CONTROL PARA SISTEMAS CON CEROS

A continuación se presentan ejemplos de aplicación de los esquemas propuestos de identificación y control para sistemas con ceros de fase mínima y de fase no mínima.

Ejemplo 1. Modelado primer orden con cero. Fase mínima. El sistema está dado por

$$G(s) = \frac{s+0.1}{s+1}$$

El modelo utilizado está dado por la ecuación (4), el cual es implementado con una red neuronal backpropagation con la estructura [10 10 1], es decir, una red neuronal con tres capas, con 10 neuronas en las primeras dos capas y una neurona en la capa de salida. La función de activación en las primeras dos capas fue la tangente hiperbólica y la función lineal en la capa de salida. Esta misma estructura de red fue utilizada en los ejemplos subsecuentes. Este modelo fue validado de acuerdo al esquema mostrado en la figura 7.

En la figura 9 se puede observar el buen desempeño del modelo de este sistema con la propuesta, ya que el modelo sigue al sistema.

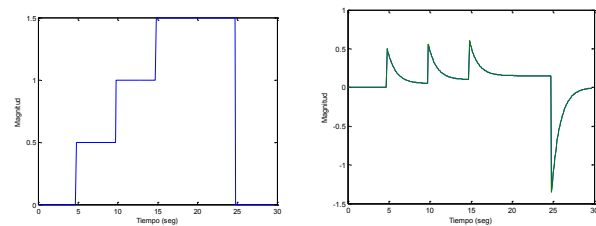


Figura 9. Validación modelo ejemplo 1. a) Entrada, b) Salida del sistema y salida del modelo.

Ejemplo 2. Modelado primer orden con cero. Fase NO mínima.

$$G(s) = \frac{s-0.1}{s+1}$$

El modelo utilizado está dado por la ecuación (4). En la figura 10 se puede observar el buen desempeño del modelo de este sistema con la propuesta, ya que el modelo sigue al sistema.

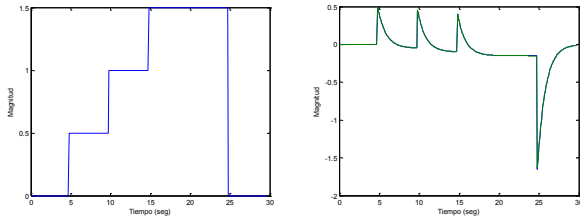


Figura 10. Validación modelo ejemplo 2. a) Entrada , b) Salida del sistema y salida del modelo.

Ejemplo 3. Control primer orden con cero. Fase mínima.

$$G(s) = \frac{0.7s + 0.3}{s + 1}$$

El controlador utilizado está dado por la ecuación (6). En la figura 11 se puede observar el buen desempeño del sistema en lazo cerrado, ya que el sistema sigue a la referencia para una señal de validación, que es una suma de dos senoidales de diferentes frecuencias. El término que representa la dinámica interna del controlador (7) está dado por

$$\left| 1 - \frac{bT}{a} \right| = |0.9571| = 0.9571 < 1$$

Lo cual comprueba la estabilidad del sistema, generando una señal de control acotada que se puede observar en la figura 11(b).

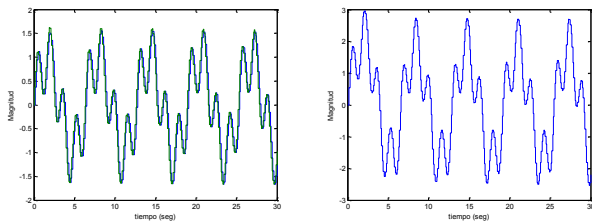


Figura 11. Validación control ejemplo 3. a) Seguimiento, referencia: verde, salida: azul, b) Señal generada por controlador.

Ejemplo 4. Control primer orden con cero. Fase NO mínima.

$$G(s) = \frac{-1.6s + 0.8}{s + 1}$$

El controlador utilizado está dado por la ecuación (6). En la figura 12 se puede observar el desempeño del sistema en lazo cerrado, el cual no es bueno ya que el sistema no sigue a la referencia. El término que representa la dinámica interna del controlador (8) está dado por

$$\left| 1 - \frac{bT}{a} \right| = |1.05| = 1.05 > 1$$

Lo cual comprueba la inestabilidad del sistema, generando una señal de control no acotada que se puede observar en la figura 12(b). La señal generada por el controlador no explota porque es limitada por la superficie generada por la red neuronal.

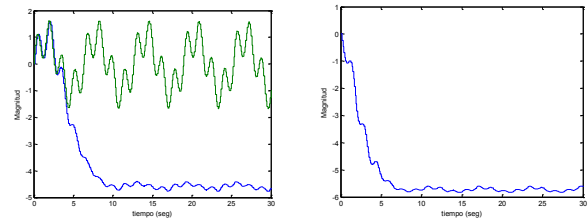


Figura 12. Validación control ejemplo 4. a) Seguimiento, referencia: verde, salida: azul, b) Señal generada por controlador.

III. CONCLUSIONES

Se presentó una estructura de antecedentes y consecuentes para la identificación y control con el método NHTE para sistemas lineales de orden uno con ceros y grado relativo cero. Se mostraron dos métodos para llegar al controlador analítico, los cuales son justificación de la estructura propuesta. El primer método hace uso de la aproximación de las derivadas a partir de diferencias finitas, mientras que el segundo método parte de la discretización de la representación en variables de estado. Ambos métodos resultaron ser equivalentes. Es necesario aclarar que el controlador analítico es aproximado mediante un aproximador multidimensional, en este caso una red neuronal.

También se derivaron condiciones de estabilidad para el controlador propuesto. El controlador es estable para sistemas de fase mínima e inestable para sistemas de fase no mínima. Las simulaciones corroboraron los resultados teóricos de las condiciones de estabilidad.

Las condiciones de estabilidad presentadas pueden ser la base para condiciones de estabilidad de controladores NHTE aplicados para sistemas no lineales.

IV. AGRADECIMIENTOS

Se reconoce el apoyo de CONACYT al primer autor a través de las becas de posgrado del Padrón Nacional de Posgrados de Calidad.

REFERENCIAS

- Al-Numay, Mohammed S. (2007), "Unified Approximate Tracking Control of Linear Systems with Unacceptable Zeros", *J. King Saud Univ.*, Vol 19, *Eng. Sci.* (2), pp. 239-251, Riyadh (1427H./2007).
- Astrom, K. J., P. Hagander and J. Sternby (1980), "Zeros of sampled systems", *IEEE*.
- Cholula S., A. Claudio J. Ruiz (2005), "Intelligent control of the regenerative braking in an induction motor drive", 2ª Conferencia de Ingeniería Eléctrica CIE 2005, Second International Conference on Electrical and Electronics Engineering, ICEEE, México, 7 al 9 de septiembre de 2005, pp-302-308.
- Figueroa Rafael, José Ruiz Ascencio, Wilberth Alcocer Rosado (2007), "Control inteligente vía NHTE en un robot de 3 GDL", Congreso Nacional 2007 de la Asociación de México de Control Automático, Monterrey, Nuevo León, 24-26 de octubre de 2007.
- Hoagg Jesse B. and Dennis S. Bernstein (2007), "Nonminimum-Phase Zeros, Much to do about nothing", *IEEE Control System Magazine*.
- Jamshidi M. and M. Malek-Zavarei (1986), "Linear Control Systems: A Computer-Aided Approach", Chapter 7: System Stability.
- Levin Asriel U. and Kumpati S. Narendra (1993), "Control of Nonlinear Dynamical Systems Using Neural Networks: Controllability and Stabilization", *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 4, No. 2.
- Levin Asriel U. and Kumpati S. Narendra (1996), "Control of Nonlinear Dynamical Systems Using Neural Networks – Part II: Observability, Identification, and Control", *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 7, No. 1.

- Li W., J.J.E. Slotine (1989), "Neural network control of unknown nonlinear systems", in: American Control Conference, vol. 2, Pittsburg, pp. 1136-1141.
- Narendra, Kunpati S. and Kannan Parthasarathy (1990), "Identification and Control of Dynamical Systems Using Neural Networks", IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 1, No. 1, Pags. 4-26.
- Ruiz, José Ascencio and Rodolfo Castillo Romero (1999), "Self-Tuning Fuzzy Identification and Control using a Hybrid State Transition Kernel", International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation, Vienna, Austria.
- Sjoberg Jonas, Lennart Ljung, Bernard Deylon and Hakan Hjalmarsson (1995), "Nonlinear Black-Box Modeling in System Identification: a Unified Overview", Automatica (Journal of IFAC), Volume 31, Issue 12, pp. 1691-1724.
- Willems, Jan C. (1972), "Dissipative Dynamical Systems. Part I: General Theory", Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer Berlin, Volume 45, Number 5 / January 1972, pags. 321-351.

V. APÉNDICE. CONTROLADOR BASADO EN LA DISCRETIZACIÓN

A continuación se muestra una forma alternativa de llegar al controlador analítico para sistemas con ceros, el cual es aproximado por el NHTE, a partir de la discretización de la representación en el espacio de estados en continuo del sistema.

Partiendo de la representación en variables de estado en tiempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n, u \in \mathfrak{R}, y \in \mathfrak{R}, \mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}, \mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{1 \times n}, D \in \mathfrak{R}$$

Se tiene una discretización de este sistema, para un tiempo de muestreo T , dada por las siguientes expresiones

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{G}\mathbf{x}[k] + \mathbf{H}u[k] \quad (9)$$

$$y[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + Du[k] \quad (10)$$

donde

$$\mathbf{G} \in \mathfrak{R}^{n \times n} \text{ y } \mathbf{H} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}. \mathbf{G}(T) = e^{\mathbf{A}T}, \mathbf{H}(T) = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda} d\lambda \right) \mathbf{B}$$

A partir de las ecuaciones (9) y (10) se obtendrá el controlador analítico para dicho sistema. Tomando un instante adelante de la ecuación de salida (10)

$$y[k+1] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k+1] + Du[k+1]$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la ecuación (9)

$$y[k+1] = \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{x}[k] + \mathbf{C}\mathbf{H}u[k] + Du[k+1] \quad (11)$$

Despejando el término $\mathbf{x}[k]$ de la ecuación (10)

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{C}^{-1}\{y[k] - Du[k]\} = \mathbf{C}^{-1}y[k] - \mathbf{C}^{-1}Du[k]$$

En el caso de la matriz $\mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$, al no ser cuadrada, \mathbf{C}^{-1} es la pseudoinversa. Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (11) queda

$$\begin{aligned}y[k+1] &= \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}y[k] + \{\mathbf{C}\mathbf{H} - \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}D\}u[k] \\ &+ Du[k+1]\end{aligned} \quad (12)$$

A partir de la última ecuación se puede despejar el controlador analítico para el sistema

$$\begin{aligned}u[k+1] &= -D^{-1}\{\mathbf{C}\mathbf{H} - \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}D\}u[k] + D^{-1}y_r[k+1] \\ &- D^{-1}\mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}y[k]\end{aligned} \quad (13)$$

donde se sustituyó $y[k+1]$ por la referencia $y_r[k+1]$. El controlador (13) define una estructura para el NHTE igual a controlador (6). Por otro lado, como el controlador (13)

depende de D^{-1} el sistema tiene que tener grado relativo cero para que el controlador esté bien definido.

En este caso, como el controlador (13) es dinámico, no es posible sustituir el control directamente en el modelo del sistema para obtener la dinámica en lazo cerrado. De forma que se procede de la siguiente manera.

Del controlador analítico (13) se hace el siguiente despeje

$$\{\mathbf{C}\mathbf{H} - \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}D\}u[k] + Du[k+1] = y_r[k+1] - \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}y[k]$$

El despeje anterior se sustituye en el modelo (12) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}y[k+1] &= \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}y[k] + \{\mathbf{C}\mathbf{H} - \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}D\}u[k] + Du[k+1] \\ &= \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}y[k] + y_r[k+1] - \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}y[k] \\ &= y_r[k+1]\end{aligned}$$

De forma que la última expresión indica que en lazo cerrado la salida del sistema $y[k+1]$ es igual a la referencia $y_r[k+1]$, siempre y cuando la dinámica interna del controlador sea estable.

A partir del controlador (13) se puede derivar una condición de estabilidad para este controlador, basada en el teorema 1, la cual se puede expresar de la siguiente manera

El sistema es estable si todos los eigenvalores de la matriz

$$-D^{-1}\{\mathbf{C}\mathbf{H} - \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}D\}$$

están dentro del círculo unitario.

Se encuentra que el controlador analítico (13) es equivalente al controlador analítico (5) .